30/11/2017

Μάθημα 15ο

Πρόταση: (Θεώρημα 14)

Ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ Β.Σ.Λ. της (E_0)

Αν $v_1, \dots, v_n \in C_1(I)$ είναι n-συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

$$y_1 v_1' + \dots + y_n v_n' = 0$$

$$\dots$$

$$y_1^{(n-2)} v_1' + \dots + y_n^{(n-2)} v_n' = 0$$

$$y_1^{(n-1)} v_1' + \dots + y_n^{(n-1)} v_n' = 0$$

ΤΟΤΕ: (i) η συνάρτηση $y_\mu = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ είναι μια (μερική) λύση της (E)

(ii) Είναι: $y_\mu(t) = \sum y_i(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} ds, \ t \in I$.

όπου $W_i(t) := \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_n \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & 1 & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

(iii) $y_\mu(t_0) = \dots = y_\mu^{(n-1)}(t_0) = 0$.

Απόδειξη

(i)

Ας είναι
a_0 | $y_\mu = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

a_1 | $y_\mu' = (y_1' v_1 + y_1 v_1') + (y_2' v_2 + y_2 v_2') + \dots + (y_n' v_n + y_n v_n')$

$= (y_1' v_1 + y_2' v_2 + \dots + y_n' v_2) + \underbrace{(y_1 v_1' + y_2 v_2' + \dots + y_n v_n')}_{0}$

$\rightsquigarrow y_\mu' = y_1' v_1 + \dots + y_n' v_n$

$$a_2 \quad y_\mu'' = (y_1'' v_1 + y_1' v_1') + (y_2'' v_2 + y_2' v_2') + \dots + (y_n'' v_n + y_n v_n')$$

$$= y_1'' v_1 + y_2'' v_2 + \dots + y_n'' v_n$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} \quad y_\mu^{(n-1)} = y_1^{(n-1)} v_1 + y_2^{(n-1)} v_2 + \dots + y_n^{(n-1)} v_n$$

$$a_n \quad y_\mu^{(n)} = \left(y_1^{(n)} v_1 + \dots + y_n^{(n)} v_n\right) + \left(y_1^{(n-1)} v_1' + \dots + y_n^{(n-1)} v_n'\right) \xrightarrow{} b/a_n$$

$$= \left(y_1^{(n)} v_1 + \dots + y_n^{(n)} v_n\right) + \frac{b}{a_n}$$

$$a_n y_\mu^{(n)} + \dots + a_1 y_\mu' + a_0 y_\mu =$$

$$= v_1 \Big[\overbrace{a_0 y_1 + a_1 y_1' + a_2 y_1'' + \dots + a_n y_1^{(n)}}^{=0} \Big]$$

$$+ v_2 \Big[\overbrace{a_0 y_2 + a_1 y_2' + \dots + a_n y_2^{(n)}}^{=0} \Big]$$

$$- - - - - - \overbrace{- - - - -}^{=0}$$

$$+ v_n \Big[a_0 y_n + a_1 y_n' + \dots + a_n y_n^{(n)} \Big] + \cancel{a_n} \frac{b}{\cancel{a_n}}$$

Άρα: $a_n y_\mu^{(n)} + \dots + a_1 y_\mu' + a_0 y_\mu = b$

$$\Rightarrow \boxed{L(y_\mu) = b}$$

(ii) Η ορίζουσα των συντελεστών του S είναι η:

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

: Η ορίζουσα Wronski των γρ. ανεξάρτητων λύσεων : $y_1, \dots, y_n$

Άρα $D = W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

και το S έχει μοναδική λύση,

$$v_i'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & 0 & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & & b/a_n & & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}{W(t)} =$$

$$= \frac{b}{a_n} \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 & y_n(t) \\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(t) & 1 & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{b}{a_n} \frac{W_i(t)}{W(t)}$$

όηδ $v_i'(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)} \cdot \frac{b(t)}{a_n(t)} \quad t \in I, \quad (i = 1, \dots, n)$

Για $t_0 \in I$, $v_i(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} \, ds$

$$\text{π.χ.}\quad \overbrace{a_2y'' + a_1y' + a_0y}^{L(y)} = b \quad (E) \quad , t\in I.$$

$\{y_1, y_2\}$ Β.Σ.Λ. της $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Είναι: $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ 1 & y_2'(t) \end{vmatrix} = -y_2(t)$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & 1 \end{vmatrix} = y_1(t)$$

$t_0 \in I$ → αυθαίρετη επιλογή

$$y_\mu(t) = y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{-y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)} \cdot \frac{b(s)}{a_2(s)}\,ds +$$

$$+ y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)}{W(s)} \cdot \frac{b(s)}{a_2(s)}\,ds =$$

$$y_\mu(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)y_2(t) - y_2(s)y(t)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} \frac{b(s)}{a_2(s)} \quad , t\in I.$$

$$y_\mu(t_0) = 0$$
$$y_\mu'(t_0) = 0$$

Παράδειγμα 4 (σελ 94) - χωρίς το Θ.14.

Να βρεθεί μία μερική λύση της:

$x^2 y'' - xy' + y = x \cdot \log x \quad , x > 0$

με το δεδομένο ότι:

$y_1(x) = x \quad , x > 0 \qquad , \qquad y_2(x) = x \cdot \log x \quad , x > 0$

είναι δύο γραμμ. ανεξ. λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς.

Λύση

Να επιβεβαιώσω ότι είναι γρ. ανεξ. οι y_1, y_2 με ορίζουσα Wronski ή ορισμό.

ΔΝΟ:
$$c_1 x + c_2 x \log x = 0 \quad , x > 0$$
$$x(c_1 + c_2 \log x) = 0 \quad , x > 0$$
$$c_1 + c_2 \log x = 0 \quad , x > 0$$

$x = 1 \rightsquigarrow c_1 = 0 \quad , c_2 = 0$ άρα λύσεις γραμμ. ανεξ.

Άρα Β.Σ.Λ. $\{y_1, y_2\}$.

Θεωρώ το σύστημα (ως προς v_1', v_2')

$$x v_1' + x \log x \cdot v_2' = 0$$

$$v_1' + (\log x + 1) v_2' = \frac{x \log x}{x^2} \quad (-x)$$

$$x \log x \cdot v_2' - x(\log x + 1) v_2' = -\log x$$

$$\cancel{x \log x v_2'} - \cancel{x \log x v_2'} - x \cdot v_2' = -\log x$$

$$v_2' = \frac{\log x}{x} \Rightarrow v_2(x) = \int_1^x \frac{\log s}{s} ds \quad , x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2(x) = \frac{\log^2 x}{2} \quad , x > 0}$$

Άρα $v_1' = -\log x \cdot v_2' \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{v_1(x) = -\frac{\log^3 x}{3}}$

$$y_\mu(x) = x\left(-\frac{\log^3 x}{3}\right) + x\log x \frac{\log^2 x}{2} = -\frac{x\log^3 x}{3} + x\frac{\log^3 x}{2}$$

$$\boxed{y_\mu(x) = \frac{1}{6} x \log^3 x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = x\log x + x - x\log x = x > 0$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x\log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = -x\log x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x$$

$$y_\mu(x) = y_1(x) \int_1^x \frac{W_1(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_2(s)} ds$$

$$+ y_2(x) \int_1^x \frac{W_2(s)}{W(s)} \cdot \frac{b(s)}{a_2(s)} ds$$

$$= x \int_1^x \frac{-s\log s}{s} \cdot \frac{s\log s}{s^2} ds$$

$$+ x\log x \int_1^x \frac{s}{s} \cdot \frac{s\log s}{s^2} ds.$$

$$= (\dots)$$

Όλες οι λύσεις της (E_2) δίνονται από τον τύπο:

$$y(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x \cdot \log x + \frac{x \cdot \log^3 x}{6} \quad , x > 0$$

Άσκηση 5 σελ 95

$$y''' - 3y'' + 2y' = e^x \quad , (E_0): e^{\lambda x} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\lambda^3 \cdot e^{\lambda x} - 3\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$
$$\lambda = 0, 1, 2$$

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1.$$
$$y_2 = e^x$$
$$y_3 = e^{2x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x} \neq 0$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 1 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2e^{2x} \\ 0 & 1 & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -2e^{2x}$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x$$

$$y_\mu(x) = y_1(x)\int_0^x \frac{W_1(s)\, e^s\, ds}{W(s)} + y_2(x)\int_0^x \frac{W_2(s)\, e^s\, ds}{W(s)} +$$

$$+ y_3(x)\int_0^x \frac{W_3(s)}{W(s)} e^s\, ds$$

$$= 1\cdot \int_0^x \frac{e^{3\cdot s}\, e^s}{2e^{3s}} ds + e^x \int_0^x \frac{-2e^{2s}}{2e^{3s}} e^s\, ds +$$

$$+ e^{2x}\int_0^x \frac{e^s}{2e^{3s}} e^s\, ds$$

$$\boxed{y_\mu(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x\cdot e^x - \frac{1}{2}}$$

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} - x\cdot e^x - \frac{1}{2}$$

Ομογενείς γραμμικές Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.

$$a_n y^n + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad , a_i \in \mathbb{R} \quad , a_n \neq 0$$

$$a_1 y' + a_0 y = 0 \Rightarrow y(t) = c_1 \cdot e^{-\int \frac{a_0}{a_1} dt} = e^{-\frac{a_0}{a_1} t}$$

$$y' + py = 0 \Rightarrow \boxed{y(t) = e^{-pt}}$$

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y'' + py' = 0 \\ \boxed{y' = u} \end{array}\right\} \quad u' + pu = 0 \quad \Big\} \quad u = e^{-pt}$$

$$y = u z \Rightarrow \dots$$